Ueber die Körper,

die durch

Rotation der Lemniskate

$$„(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2“$$

um deren Achsen entstehen.

Von

H. Kreuder.

Euskirchen, 1876.

Verlag der Fr. Kreuder'schen Buchhandlung.

Druck von M. DuMont-Schauberg in Köln.

Ueber die Körper,

die durch

Rotation der Lemniskate

„$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$“

um deren Achsen entstehen.

Von

H. Kreuder.

Euskirchen, 1876.

Verlag der Fr. Kreuder'schen Buchhandlung.

Druck von M. DuMont-Schauberg in Köln.

I.

Die Lemniskate, als Fußpunktkurve einer Hyperbel aufgefaßt, ist die Linie, welche durch die Aufeinanderfolge der Durchschnittspunkte der Tangenten einer Hyperbel und der Senkrechten, welche vom Mittelpunkte auf diese gefällt werden, entsteht.

Ist die Gleichung einer Hyperbel

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

so ist die Gleichung der an den Punkt $(x_{\prime}, y_{\prime})$ gezogenen Tangente

$$\frac{xx_{\prime}}{a^2} - \frac{yy_{\prime\prime}}{b^2} = 1,$$

und der hierauf vom Mittelpunkte gefällten Senkrechten

$$y = -\frac{a^2 x_{\prime}}{b^2 y_{\prime}} x.$$

Berechnet man $x_{\prime}$ und $y_{\prime}$ aus diesen letzteren Gleichungen und setzt diese Werthe in die Gleichung

$$\left(\frac{x_{\prime}}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_{\prime}}{b}\right)^2 = 1$$

ein, so erhält man als Gleichung der Lemniskate:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2.$$

Denkt man sich dieselbe in die xz-Ebene so gelegt, daß sie der Gleichung

$$(x^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - b^2z^2 \quad (1)$$

entspricht, so entstehen bei Umdrehung dieser um die z-Achse oder bei Umdrehung dieser um die x-Achse zwei verschiedene Rotationslemniskate. Wird die Lemniskate um die z-Achse gedreht, so hat der Rotationskörper die Gleichung

$$\xi^2 + v^2 = [f(z)]^2 + [\varphi(z)]^2,$$

wenn $x = f(z)$, $y = \varphi(z)$ bezüglich die Projectionen der Lemniskate auf die xz- oder yz-Ebene bedeuten.

Bei der durch Gleichung (1) ausgedrückten Lage ist

$$x^2 = \frac{a^2 - 2z^2 \pm \sqrt{a^4 - 4z^2(a^2 + b^2)}}{2},$$

$$y = o.$$

Der erste Rotationskörper hat daher die Gleichung

$$\xi^2 + v^2 = \frac{a^2 - 2z^2 \pm \sqrt{a^2 - 4z^2(a^2 + b^2)}}{2}$$

oder nach einigen Umformungen, wenn noch $\xi = x$, $v = y$ gesetzt wird:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2) - b^2z^2.$$

Der zweite Rotationskörper hat die Gleichung

$$v^2 + \zeta^2 = \frac{-2x^2 - b^2 \pm \sqrt{b^4 + 4x^2(a^2 + b^2)}}{2}.$$

Nach einigen Umformungen erhält man als Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - b^2(y^2 + z^2),$$

wenn an Stelle von v y, von ζ z gesetzt wird. Ist $a = b$, so sind die Gleichungen der Rotationslemniskate

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2) \text{ I.}$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 - z^2) \text{ II.}$$

II.

Um Oberfläche und Inhalt dieser beiden Rotationskörper nach der Guldin'schen Regel zu bestimmen, müssen Bogen und Flächeninhalt der Lemniskate, so wie die Coordinaten der Schwerpunkte dieser bekannt sein. Wird die Lemniskate dargestellt durch die Gleichung

$$(x^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - b^2z^2,$$

oder in Polar-Coordinaten ausgedrückt, durch

$$r^2 = a^2 \cos\varphi^2 - b^2 \sin\varphi^2,$$

so bestimmt sich der Bogen nach der Formel

$$s = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Da $\frac{dr}{d\varphi} = -(a^2 + b^2) \frac{\sin\varphi \ \cos\varphi}{\sqrt{a^2 \cos\varphi^2 - b^2 \sin\varphi^2}}$,

so wird

$$s = \int \sqrt{a^2 \cos\varphi^2 - b^2 \sin\varphi^2 + \frac{(a^2 + b^2)^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2}{a^2 \cos\varphi^2 - b^2 \sin\varphi^2}}\, d\varphi$$

$$= \int \sqrt{\frac{a^4 \cos\varphi^2 + b^4 \sin\varphi^2}{a^2 \cos\varphi^2 - b^2 \sin\varphi^2}}\, d\varphi$$

$$= a \int \sqrt{\frac{1 - \frac{a^4 - b^4}{a^4} \sin\varphi^2}{1 - \frac{a^2 + b^2}{a^2} \sin\varphi^2}}\, d\varphi.$$

Durch Substitution von

$$\sin\tau^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \sin\varphi^2 \text{ wird}$$

$$\sin\varphi^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \sin\tau^2$$

$$d\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{\cos\tau}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \sin\tau^2}}\, d\tau.$$

Daher ist

$$s = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \sqrt{\frac{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin\tau^2}{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \sin\tau^2}} \cdot d\tau.$$

Durch Entwicklung von

$$\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin\tau^2} \text{ und}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \sin\tau^2}}$$

nach dem binomischen Lehrsatze entstehen zwei convergirende Reihen.

Es wird alsdann:

$$s = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2}\, sin\, \tau^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^2 sin\, \tau^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^3 sin\, \tau^6 - \frac{5}{128} \left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^4 sin\, \tau^8 \ldots \right].$$

$$\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{a^2+b^2}\, sin\, \tau^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^2 sin\, \tau^4 + \frac{5}{16}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^3 sin\, \tau^6 + \frac{35}{128}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^4 sin\, \tau^8 \ldots \right] d\tau$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \left[1 + \frac{b^4}{2a^2(a^2+b^2)}\, sin\, \tau^2 + \frac{b^4\,(4a^4-b^4)}{8a^4(a^2+b^2)^2}\, sin\, \tau^4 + \frac{b^4\,(8a^8-4a^4b^4+b^4)}{16a^6\,(a^2+b^2)^3}\, sin\, \tau^6 + \right.$$

$$\left. \frac{b^4\,(64a^{12}-48a^8b^4+24a^4b^8-5b^{12})}{128a^8\,(a^2+b^2)^4}\, sin\, \tau^8 \ldots \right] d\tau$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \left[\tau + \frac{b^4}{4a^2\,(a^2+b^2)}\, \tau - \frac{b^4}{4a^2\,(a^2+b^2)}\, cos\, \tau\, sin\, \tau + \frac{3b^4\,(4a^4-b^4)}{64a^4\,(a^2+b^2)^2}\, \tau - \right.$$

$$\frac{b^4\,(4a^4-b^4)}{32a^4\,(a^2-b^2)^2}\, cos\, \tau\, (sin\, \tau^3 + \tfrac{3}{2}\, sin\, \tau) + \frac{5b^4\,(8a^8-4a^4b^4+b^8)}{256a^6\,(a^2+b^2)^3}\, \tau$$

$$- \frac{b^4(8a^8-4a^4b^4+b^8)}{96a^6(a^2+b^2)^3}\, cos\, \tau (sin\, \tau^5 + \tfrac{5}{4} sin\, \tau^3 + \tfrac{15}{18} sin\, \tau) + \frac{35b^4(64a^{12}-48a^8b^4+24a^4b^8-5b^{12})}{16384a^8(a^2+b^2)^4}\, \tau$$

$$\left. - \frac{b^4(64a^{12}-48a^8b^4+24a^4b^8-5b^{12})}{1024a^8\,(a^2+b^2)^4} \cdot cos\, \tau\, (sin\, \tau^7 + \tfrac{7}{6}\, sin\, \tau^5 + \tfrac{35}{24}\, sin\, \tau^3 + \tfrac{35}{16}\, sin\, \tau) \ldots \right].$$

Zur Bestimmung des Quadrantenbogens ist φ zwischen den Grenzen o und $arc\ tg\ \frac{b}{a}$ zu rechnen, τ daher zwischen den Grenzen o und $arc\ sin\ \frac{b}{a}$. Für $b = a$ wird der Quadrant

$$\frac{s}{4} = 1{,}3070586a$$
$$s = 5{,}2282344a.$$

Dieser Werth für den Bogen der Lemniskate ist ungenau, da die Reihe, welche zur Bestimmung des Bogens entwickelt wurde, eine schwach convergirende ist.

Einen genaueren Werth für den Fall $a = b$ erhält man durch Einsetzung dieses in die Formel

$$s = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{\frac{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} sin\ \tau^2,}{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} sin\ \iota^2,}} d\tau,$$

indem alsdann

$$s = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2} sin\ \tau^2}} d\tau$$

ein elliptisches Integral erster Art ist. Durch Anwendung der Lauden'schen Substitution

$$tg\ \tau = \frac{sin\ 2\tau_{\prime}}{\sqrt{\frac{1}{2}} + cos\ 2\tau_{\prime}} \text{ wird}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2} sin\ \tau^2}} d\tau =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a \sqrt{\frac{k_{\prime} \cdot k_{\prime\prime} \cdot k_{\prime\prime\prime} \cdots k_n}{\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ l\ tg\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\tau_n\right),$$

k_r und τ_r werden aus den Gleichungen

$$k_r = \frac{2\sqrt{k_{r-1}}}{1 + k_{r-1}}$$

$$sin\ (2\tau_r - \tau_{r-1}) = k_{r-1}\ sin\ \tau_{r-1}$$

bestimmt.

Für den vorliegenden Fall ist:

$$k = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}7071068$$

$$k_{,} = \frac{2\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}}{1+\sqrt{\tfrac{1}{2}}} = 2\,\frac{\sqrt{0{,}7071068}}{1{,}7071068} = 0{,}9851716$$

$$k_{,,} = \frac{2\sqrt{0{,}985716}}{1{,}985716} = 0{,}9999721$$

$$k_{,,,} = \frac{2\sqrt{0{,}9999721}}{1{,}9999721} = 1.$$

$$\sin\left(2\tau_{,} - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}7071068 \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\tau_{,} = 67^0\,30'$$

$$\sin\,(2\tau_{,,} - 67^0\,30') = 0{,}9851716 \sin 69^0\,30'$$

$$2_{,,} = 65^0\,31'\,48{,}''8 + 67^0\,30'$$

$$\tau = 66^0\,30'54{,}''4.$$

$$\sin\,(2\tau_{,,,} - 66^0\,30'\,54{,}''4) = 0{,}9999721 \cdot \sin 66^0\,30'\,54{,}''4$$

$$2\tau_{,,,} = 66^0\,30'\,40{,}''6 + 66^0\,30'\,54{,}''4$$

$$\tau_{,,,} = 66^0\,30'\,47{,}''5.$$

$$\frac{s}{4} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\sin\tau^2}}\,d\tau =$$

$$\sqrt{\frac{0{,}9851716 \cdot 0{,}9999721}{2 \cdot 0{,}7071068}} \cdot \frac{0{,}6821886}{0{,}4342945}\,a = 1{,}3110296a.$$

Der ganze Bogen der Lemniskate ist daher

$$s = 5{,}2441184a.$$

III.

Bezeichnen ξ und ζ die Coordinaten des Schwerpunkts des Bogens, so gelten zur Bestimmung dieser die Formeln

$$\xi \cdot s = \int x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx \quad (1)$$

$$\zeta\ s = \int z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx. \quad (2)$$

Da aus der Gleichung der Lemniskate folgt:

$$z = \sqrt{\frac{-2x^2 - b^2 + \sqrt{4x^2(a^2 - b^2) + b^4}}{2}},$$

so ist

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{2}x \frac{a^2+b^2-\sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4}}{\sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4}\sqrt{-2x^2-b^2+\sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4}}}.$$

Setzt man diesen Werth in (1) ein, so wird

$$\xi \cdot s = \int x \sqrt{\frac{2x^2(a^4+b^4)+b^4\sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4}-b^6}{[4x^2(a^2+b^2)+b^4]\,[\sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4}-2x^2-b^2]}} \cdot dx.$$

Setzt man

$$\sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4} = t,$$

so wird

$$x = \sqrt{\frac{t^2 - b^4}{4(a^2+b^2)}},$$

$$dx = \frac{tdt}{\sqrt{4(a^2+b^2)(t^2-b^4)}}.$$

$$\xi \cdot s = \frac{1}{4\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \int \sqrt{\frac{(t^2-b^4)(a^2-b^2)+2b^4t-2b^6}{2t(a^2+b^2)-t^2-2a^2b^2-b^4}} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{a^2+b^2}} \int \sqrt{\frac{(a^2-b^2)t+b^2(a^2+b^2)}{2a^2+b^2-t}} \cdot dt.$$

Durch Substitution von

$$\sqrt{\frac{(a^2-b^2)t+b^2(a^2+b^2)}{2a^2+b^2-t}} = v,$$

$$t = \frac{(2a^2 + b^2)\, v^2 - b^2 (a^2 + b^2)}{a^2 - b^2 + v^2},$$

$$dt = \frac{4a^4 v}{(a^2 - b^2 + v^2)}\, dv$$

wird

$$\xi \cdot s = \frac{a^4}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{v^2}{(a^2 - b^2 + v^2)^2}\, dv$$

$$= \frac{a^4}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \left[- \frac{v}{a^2 - b^2 + v^2} + \int \frac{dv}{a^2 - b^2 + v^2} \right].$$

Ist $a > b$, so wird

$$\xi \cdot s = \frac{a^4}{2\sqrt{a^2+b^2}} \left[- \frac{v}{a^2-b^2+v^2} + \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, arc\, tg \frac{v}{\sqrt{a^2-b^2}} \right].$$

Für $b > a$

$$\xi \cdot s = \frac{a^4}{2\sqrt{a^2+b^2}} \left[- \frac{v}{a^2-b^2+v^2} - \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\, l \frac{\sqrt{b^2-a^2}+v}{\sqrt{b^2-a^2}-v} \right].$$

Für $b = a$:

$$\xi \cdot s = - \frac{a^3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{v}.$$

Soll die Coordinate des Schwerpunkts ξ für den Quadranten bestimmt werden, so ist x zwischen den Grenzen o und a, t daher zwischen den Grenzen b^2 und $2a^2 + b^2$, v zwischen b und ∞ zu nehmen.

Es ist alsdann

$$\zeta \cdot s = \frac{a^4}{2\sqrt{a^2+b^2}} \left[\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-b^2}} + \frac{b}{a^2} - \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\, arc\, tg \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \right],$$

und für den Fall $a = b$.

$$\zeta \cdot s = \frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

$$\zeta \cdot s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{2x^2 (a^4 - b^4) + b^4 \sqrt{4x^2 (a^2+b^2) + b^4} - b^6}{4x^2 (a^2 + b^2) + b^8}}\, dx.$$

Wendet man die oben erwähnte Substitution an, so wird

$$\zeta \cdot s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{\frac{t^2 - b^4}{2} \cdot (a^2 - b^2) + b^4 t - b^6}{4\,(a^2 + b^2)\,(t^2 - b^4)}} \cdot dt$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{a^2 + b^2}} \int \sqrt{\frac{(t^2 - b^4)\,(a^2 - b^2) + 2b^4 t - 2b^6}{t^2 - b^4}}\, dt$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{a^2 + b^2}} \int \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)\,t + b^2\,(a^2 + b^2)}{t + b^2}}\, dt.$$

Durch Substitution von

$$u = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)\,t + b^2\,(a^2 + b^2)}{t + b^2}} \text{ wird}$$

$$t = \frac{b^2\,(a^2 + b^2 - u^2)}{b^2 - a^3 + u^2},$$

$$dt = - \frac{4b^4 u}{(b^2 - a^2 + u^2)^2}\, du.$$

$$\zeta \cdot s = \frac{b^4}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{-u^2}{(b^2 - a^2 + u^2)^2}\, du$$

$$= \frac{b^4}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[\frac{u}{b^2 - a^2 + u^2} - \int \frac{1}{b^2 - a^2 + u^2}\, du \right].$$

Ist $a > b$, so wird

$$\zeta \cdot s = \frac{b^4}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[\frac{u}{b^2 - a^2 + u^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}}\, l\, \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + u}{\sqrt{a^2 - b^2} - u} \right];$$

$a < b$

$$\zeta \cdot s = \frac{b^4}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[\frac{u}{b^2 - a^2 + u^2} - \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, arc\ tg\, \frac{u}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right];$$

$a = b$

$$\zeta \cdot s = \frac{a^3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{u}.$$

Soll diese Coordinate für den Schwerpunkt des Quadranten bestimmt werden, so ist x zwischen den Grenzen o und a, t zwischen

den Grenzen b^2 und $2a^2 + b^2$, u zwischen den Grenzen a und $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ zu nehmen. Es ist alsdann

$$\zeta \cdot s = \frac{b^4}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\frac{a^2\sqrt{a^2+b^2}}{b^4} - \frac{a}{b^2} + \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} \cdot l\,\frac{\sqrt{a^4-b^4}+a^2}{\sqrt{a^4-b^4}-a^2} - \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\,l\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{\sqrt{a^2-b^2}-a}\right].$$

Für den Fall $a = b$ ist

$$\zeta \cdot s = a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Addirt man hierzu die vorher für die gleichseitige Lemniskate gefundene Formel

$$\xi \cdot s = \frac{a^2}{\sqrt{2}},$$

so wird

$$(\xi + \zeta)\, s = a^2.$$

Da a^2 den Flächeninhalt einer gleichseitigen Lemniskate, deren Halb-Achse $= a$ ist, bedeutet, so ergibt sich hieraus die Regel: Das Rechteck aus dem Quadrantenbogen und der Summe der Coordinaten des Schwerpunkts desselben ist dem Flächeninhalt der Lemniskate gleich.

Aus $\xi \cdot s = \frac{a^2}{\sqrt{2}}$ folgt $\xi = 0{,}5393523 \cdot a$;

aus $\zeta \cdot s = a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $\zeta = 0{,}2234070 \cdot a$.

IV.

Der Flächeninhalt der Lemniskate $(x^2 + z^2) = ax^2 - b^2z^2$ ist:

$$Fl = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{-2x^2 - b^2 + \sqrt{4x^2(a^2+b^2) + b^4}} \cdot dx.$$

Substituirt man

$$\sqrt{4x^2(a^2+b^2) + b^4} = t,$$

$$x = \sqrt{\frac{t^2 - b^4}{4(a^2+b^2)}},$$

$$dx = \frac{tdt}{\sqrt{4(a^2+b^2)}\sqrt{t^2-b^4}}, \text{ so wird}$$

$$Fl = \frac{1}{4(a^2+b^2)}\int\sqrt{\frac{2t(a^2+b^2)-t^2-2a^2b^2-b^4}{t^2-b^4}}\cdot tdt$$

$$= \frac{1}{4(a^2+b^2)}\int\sqrt{\frac{2a^2+b^2-t}{t+b^2}}\cdot tdt.$$

Durch Einsetzung von

$$v = \sqrt{\frac{2a^2+b^2-t}{t+b^2}},$$

$$t = \frac{2a^2+b^2-b^2v^2}{1+v^2},$$

$$dt = -\frac{4v(a^2+b^2)}{(1+v^2)^2}dv, \text{ wird}$$

$$Fl = -\int v^2\frac{2a^2+b^2-b^2v^2}{(1+v^2)^2}dv$$

$$= \frac{2a^2v+b^2v-b^2v^3}{4(1+v^2)^2} - \int\frac{2a^2+b^2-3b^2v^2}{4(1+v^2)^2}dv$$

$$= \frac{2a^2v+b^2v-b^2v^3}{4(1+v^2)^2} - \frac{(2a^2+b^2)v}{8(1+v^2)}$$

$$- \frac{2a^2+b^2}{8}\,arc\,tg\,v - \frac{3b^2v}{8(1+v^2)} + \frac{3b^2}{8}\,arc\,tg\,v$$

$$= \frac{a^2-b^2-(a^2+3b^2)v^2}{4(1+v^2)^2}v - \frac{a^2-b^2}{4}\,arc\,tg\,v.$$

Soll der Flächeninhalt des Quadranten berechnet werden, so ist x zwischen den Grenzen o und a, t zwischen den Grenzen b^2 und $2a^2+b^2$, v zwischen den Grenzen $\frac{a}{b}$ und o zu nehmen.

Es ist alsdann

$$Fl = \frac{ab}{4} + \frac{a^2-b^2}{4}\,arc\,tg\,\frac{a}{b}.$$

Der Flächeninhalt der ganzen Lemniskate ist gleich

$$ab + (a^2-b^2)\,arc\,tg\,\frac{a}{b}.$$

Bei der gleichseitigen Lemniskate ist der Flächeninhalt

$$= a^2;$$

für $a = b\sqrt{3}$

$$Fl = \frac{a^2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}a^2\frac{\pi}{3} = 1{,}275482a^2,$$

für $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$

$$Fl = a^2\sqrt{3} - 2a^2\frac{\pi}{6} = 0{,}684853a^2.$$

V.

Die Coordinaten des Schwerpunkts der Fläche bestimmen sich nach den Formeln

$$\xi \cdot Fl = S\, z \cdot x \cdot dx$$

$$\zeta \cdot Fl = \tfrac{1}{2}\, S\, z^2 dx.$$

Durch Einsetzen der bereits gefundenen Werthe wird

$$\xi \cdot Fl = \frac{1}{\sqrt{2}}\int x\sqrt{-2x^2 - b^2 + \sqrt{4x^2(a^2+b^2) + b^4}}\, dx$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\int\sqrt{2t(a^2+b^2) - t^2 - 2a^2b^2 - b^4} \cdot tdt$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\int\sqrt{(t-b^2)(2a^2+b^2-t)} \cdot tdt.$$

Setzt man

$$\sqrt{\frac{t-b^2}{2a^2+b^2-t}} = v, \text{ daher}$$

$$t = \frac{b^2 + (2a^2+b^2)v^2}{1+v^2},$$

$$dt = \frac{4a^2v}{(1+v^2)^2} \cdot dv, \text{ so wird}$$

$$\xi \cdot Fl = \frac{a^4}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}}\int\frac{v^2[b^2 + (2a^2+b^2)v^2]}{(1+v^2)^4} \cdot dv$$

$$= \frac{a^4}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} \left[- \frac{v\,[b^2 + (2a^2+b^2)\,v^2]}{6\,(1+v^2)^3} \right.$$

$$\left. + \int \frac{v^2\,(2a^2+b^2)}{2\,(1+v^2)^3}\,dv + \int \frac{b^2}{6\,(1+v^2)^3}\,dv \right]$$

$$= \frac{a^4}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} \left[- v\,\frac{b^2 + (2a^2+b^2)v^2}{6\,(1+v^2)^3} - v\,\frac{2a^2+b^2}{8\,(1+v^2)^2} \right.$$

$$+ \int \frac{2a^2+b^2}{8\,(1+v^2)^2}\,dv + \frac{b^2 v}{24\,(1+v^2)^2}$$

$$\left. + \frac{b^2 v}{16\,(1+v^2)} + \frac{b^2}{16}\,arc\;tg\;v \right]$$

$$= \frac{a^4}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} \left[- v\,\frac{b^2 + (2a^2+b^2)v^2}{6\,(1+v^2)^3} - v\,\frac{2a^2+b^2}{8\,(1+v^2)^2} \right.$$

$$+ v\,\frac{2a^2+b^2}{16\,(1+v^2)} + \frac{2a^2+b^2}{16}\,arc\;tg\;v$$

$$\left. + \frac{b^2 v}{24\,(1+v^2)^2} + \frac{b^2 v}{16\,(1+v^2)} + \frac{b^2}{16}\,arc\;tg\;v \right]$$

$$= \frac{a^4}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} \left[\frac{3v^4\,(a^2+b^2) - 8a^2 v^2 - 3\,(a^2+b^2)}{24\,(1+v^2)^3}\,v \right.$$

$$\left. + \frac{a^2+b^2}{8}\,arc\;tg\;v \right].$$

Soll die Coordinate des Schwerpunkts der Quadrantenfläche ξ bestimmt werden, so ist x zwischen den Grenzen o und a, t zwischen b^2 und $2a^2 + b^2$, v zwischen o und ∞ zu nehmen. Alsdann ist

$$\xi \cdot Fl = \frac{a^4}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} \cdot \frac{a^2+b^2}{16} \cdot \pi$$

$$= \frac{a^4 \pi}{16\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Für $a = b$ ist

$$\xi \cdot Fl = 0{,}1388401 a^3,$$

$$\zeta = 4 \cdot 0{,}1388401 a = 0{,}5553604 a;$$

für $a = b\sqrt{3}$ ist

$$\xi \cdot Fl = \frac{a^3 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{32}$$

$$= 0{,}1700437 a^3,$$

$$\xi = \frac{4 \cdot 0{,}17004370}{1{,}275482} \cdot a$$

$$= 0{,}533269 a;$$

für $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$

$$\xi \cdot Fl = \frac{a^3 \pi}{32}$$

$$\xi = \frac{\pi}{8 \cdot 0{,}684853} \cdot a$$

$$= 0{,}573407 a.$$

$$\zeta \cdot Fl = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{S}\left(-2x^2 - b^2 + \sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4}\right)dx$$

$$= -\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}b^2 x + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{S}\sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4} \cdot dx.$$

Um $\frac{1}{4}\,\mathrm{S}\sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4} \cdot dx$ aufzulösen, setze man

$$t = \frac{\sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4} - 2\sqrt{a^2+b^2} \cdot x}{b^2}.$$

Daher $x = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1-t^2}{2t^z}$,

$$dx = -\frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} \frac{1+t^2}{2t^2}\,dt.$$

Es ist dann

$$\frac{1}{4}\int\sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4} \cdot dx = -\frac{b^4}{32\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{(1+t^2)^2}{t^3} \cdot dt$$

$$= -\frac{b^4}{32\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\frac{1}{2t^2} + 2lt + \frac{1}{2}t^2\right).$$

$$\zeta \cdot Fl = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}b^2 x - \frac{b^4}{32\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\frac{1}{2t^2} + 2lt + \frac{1}{2}t^2\right).$$

Integrirt man zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = a$, t daher zwischen $t = 1$ und $t = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b}\right)^2$, so wird

$$\zeta \cdot Fl = -\tfrac{1}{6}a^3 - \tfrac{1}{4}b^2 a -$$

$$\frac{b^4}{64\sqrt{a^2+b^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{b}\right)^4 - \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)^4 + 4l\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{b}\right)^2\right].$$

Für $a = b$ ist

$$\zeta \cdot Fl = \left[-\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{16\sqrt{2}}\, l(\sqrt{2}-1)^2\right]a^3$$

$$= 0{,}0362367a^3$$

$$\zeta = 4 \cdot 0{,}0362367a = 0{,}1449468a.$$

Ist $a = b\sqrt{3}$, so ist

$$\zeta \cdot Fl = \left[-\frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{7}{24} - \frac{\sqrt{3}}{144}\, l(2-\sqrt{3})\right]a^3$$

$$= (0{,}0416667 + 0{,}0158405)a^3$$

$$= 0{,}0575072a^3$$

$$\zeta = \frac{4 \cdot 0{,}0575072}{1{,}275482} \cdot a$$

$$= 0{,}180347a.$$

Ist $b = a\sqrt{3}$, so ist

$$\zeta \cdot Fl = \left(-\frac{7}{24} - \frac{9}{32}\, l\, 0{,}3333333\right)a^3$$

$$= (0{,}3090567 - 0{,}2916667)a^3.$$

$$\zeta = \frac{4 \cdot 0{,}01739}{0{,}6848535} \cdot a$$

$$= 0{,}100109a.$$

VI.

Rotirt die in xz-Ebene gelegene Lemniskate

$$(x^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - b^2z^2$$

um die z-Achse, so hat nach I der Rotationskörper die Gleichung:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2) - b^2z^2.$$

Die Oberfläche dieses ist gleich der Oberfläche eines senkrechten Cylinders, dessen Achse gleich ist dem halben Lemniskatenbogen und dessen Radius der Grundfläche die ξ-Coordinate des Schwerpunkts dieses Bogens ist. Es ist daher

$$o_1 = 2\pi \cdot \xi \cdot s.$$

Setzt man für $\xi \cdot s$ den in III gefundenen Werth ein, unter Berücksichtigung, daß dort s den Quadrantenbogen bedeutet, so wird

$$o_1 = \frac{a^4\pi^2}{a^2+b^2} + \frac{2a^2b\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{2a^4\pi}{\sqrt{a^4-b^4}}\, arc\ tg\, \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Für $a = b$ ist

$$o_1 = 2a^2\pi\sqrt{2} = 8{,}8857638\, a^2.$$

Wird bei der erwähnten Lage der Lemniskate dieselbe um die x-Achse gedreht, so entsteht der zweite Rotationskörper:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - b^2(y^2 + z^2),$$

dessen Oberfläche ist

$$o_2 = 2\pi \cdot \zeta \cdot s$$

$$= 4\pi a^2 - \frac{4\pi ab^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$+ \frac{2b^2\pi}{a^2 + b^4}\, l\, \frac{(\sqrt{a^4 - b^4} + a^2)(\sqrt{a^2 - b^2} - a)}{(\sqrt{a^4 - b^4} - a^2)(\sqrt{a^2 - b^2} + a)}.$$

Für $a = b$ ist

$$o_2 = 2a^2\pi(2 - \sqrt{2}).$$

Es ist folglich für den Fall $a = b$

$$\frac{o_1}{o_2} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1,$$

$$o_1 + o_2 = 4a^2\pi.$$

Die Summe der Oberflächen der beiden Rotationskörper ist der Oberfläche einer mit dem Radius a beschriebenen Kugel gleich.

VII.

Bezeichnet $x_{\prime}$ die Coordinate des Schwerpunkts der Oberfläche, so bestimmt sich diese Coordinate nach der Formel

$$o x_{\prime} = 2\pi \int x z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx.$$

Nach Einsetzung der in III bereits gefundenen Werthe ist

$$o x_{\prime} = \pi \sqrt{2} \int x \sqrt{\frac{2x^2(a^4 - b^4) + b^4 \sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4} - b^6}{4x^2(a^2+b^2)+b^4}} dx$$

$$= \frac{\pi}{4(a^2+b^2)} \int \sqrt{[(a^2 - b^2) t + b^2 (a^2 + b^2)] (t - b^2)} \cdot dt.$$

Wird

$$\sqrt{\frac{(a^2 - b^2) t + b^2 (a^2 + b^2)}{t - b^2}} = u \text{ gesetzt,}$$

so ist

$$t = \frac{b^2 (u^2 + a^2 + b^2)}{a^2 - a^2 + b^2},$$

$$dt = \frac{-4a^2 b^2 u}{(u^2 - a^2 + b^2)^2} du \text{ und}$$

$$o x_{\prime} = \frac{\pi}{4(a^2+b^2)} \int u \frac{2a^2 b^2}{u^2 - a^2 + b^2} \cdot \frac{-4a^2 b^2 u}{(u^2 - a^2 + b^2)^2} du$$

$$= - \frac{2\pi a^4 b^4}{a^2 + b^2} \int \frac{u^2}{(u^2 - a^2 + b^2)^3} \cdot du$$

$$= - \frac{2\pi a^4 b^4}{a^2 + b^2} \left[- \frac{u}{3(u^2 - a^2 + b^2)^2} - \frac{a^2 - b^2}{3} \int \frac{du}{(u^2 - a^2 + b^2)^3} \right]$$

$$= - \frac{2\pi a^4 b^4}{a^2 + b^2} \left[- \frac{u}{3(u^2 - a^2 + b^2)^2} - \frac{a^2 - b^2}{3} . \right.$$

$$\left\{- \frac{u}{4(a^2 - b^2)(u^2 - a^2 + b^2)^2} + \frac{3u}{8(a^2 - b^2)^2 (u^2 - a^2 + b^2)} + \frac{3}{8(a^2 - b^2)^2 \sqrt{b^2 - a^2}} \, arc\, tg \frac{u}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right\}\Bigg].$$

Bei dem letzten Gliede in der { } Klammer ist vorausgesetzt, daß $b > a$. Ist $b < a$, so wird dasselbe

$$- \frac{3}{16(a^2 - b^2)^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \, l \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + u}{\sqrt{a^2 - b^2} - u}.$$

Für $a = b$ ist

$$ox_{\prime} = - \frac{2\pi \, a^4 \, b^4}{2a^2} \int \frac{1}{u^4} du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^6 \pi}{u^3}.$$

Der Schwerpunkt der ganzen Oberfläche liegt selbstverständlich im Anfangspunkte des Coordinaten-Systems. Soll der Schwerpunkt der halben Oberfläche gefunden werden, so ist x zwischen den Grenzen o und a, t daher zwischen den Grenzen b^2 und $2a^2 + b^2$, u zwischen den Grenzen ∞ und a zu nehmen. Es ist dann

$$ox_{\prime} = \frac{a^5 \pi}{2(a^2 + b^2)} + \frac{a^5 \pi \, b^2}{4(a^4 - b^4)} + \frac{a^4 b^4 \pi}{4\sqrt{b^2 - a^2}(a^4 - b^4)} \, arc\, tg \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} - \frac{a^4 b^4 \pi^2}{8\sqrt{b^2 - a^2}\,(a^4 - b^4)}.$$

Hieraus kann $x_{\prime}$ durch Einsetzen der Werthe für o für beide Rotationskörper gefunden werden. Für den Fall $a = b$ ist

$$ox_{\prime} = \frac{a^3 \pi}{3}.$$

Für den ersten Rotationskörper ist alsdann

$$x_{\prime} = \frac{a}{3\sqrt{2}} = 0{,}2356888a,$$

für den zweiten

$$x_{\prime} = \frac{a}{3(2 - \sqrt{2})} = 0{,}5690362a.$$

VIII.

Der Inhalt eines Rotationskörpers ist gleich dem Inhalte eines senkrechten Cylinders, dessen Grundfläche die rotirende Fläche ist und dessen Achse gleich ist dem Umfange eines mit der Flächen-Schwerpunkts-Coordinate beschriebenen Kreises. Es hat daher der erste Rotationskörper den Inhalt

$$J_1 = 2\pi \cdot \xi \cdot \frac{Fl}{2},$$

der zweite

$$J_2 = 2\pi \cdot \zeta \cdot \frac{Fl}{2},$$

wo Fl den ganzen Flächeninhalt der Lemniskate bedeutet. Unter Berücksichtigung der in V gefundenen Werthe, wo Fl den Quadranten-Inhalt bezeichnet, wird

$$J_1 = \frac{a^4 \pi^2}{4\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Für $a = b$ ist

$$J_1 = \frac{a^3 \pi^2}{4\sqrt{2}} = 1,744716 a^3;$$

für $a = b\sqrt{3}$

$$J_1 = \frac{a^3 \pi^2 \sqrt{3}}{8} = 2,136831 a^3;$$

für $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$

$$J_1 = \frac{a^3 \pi^2}{8} = 1,2337 a^3.$$

Der Inhalt des zweiten Rotationskörpers ist

$$J_{II} = -\frac{2a^3\pi}{3} - ab^2\pi - \frac{b^4\pi}{16\sqrt{a^2+b^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{b}\right)^4 - \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)^4 + 4l\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{b}\right)^2\right].$$

Für $a = b$ ist

$$J_{\prime\prime} = 4\pi \cdot 0{,}0362367 a^3$$
$$= 0{,}4553638 a^3;$$

für $a = b\sqrt{3}$

$$J_{\prime\prime} = 4\pi \cdot 0{,}0575072 a^3$$
$$= 0{,}7226567 a^3;$$

für $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$:

$$J_{\prime\prime} = 4\pi \cdot 0{,}01739 a^3$$
$$= 0{,}2185292 a^3.$$

IX.

Der Schwerpunkt des ganzen Volumens beider Rotationskörper liegt natürlich im Coordinaten-Anfangspunkte. Die Coordinate $x_{\prime}$ eines beliebigen Volumens der beiden Rotationskörper bestimmt sich nach der Formel

$$V \cdot x_{\prime} = \pi \int x z^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int \left(-2x^3 - b^2 x + x\sqrt{4x^2(a^2+b^2)+b^4}\right) \cdot dx$$

$$V x_{\prime} = \frac{\pi}{2}\left(-\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{2}b^2 x^2 + \frac{\sqrt{[4x^2(a^2+b^2)+b^4]^3}}{12(a^2+b^2)}\right).$$

Wird der Schwerpunkt des halben Volumens bestimmt, so ist x zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = a$ zu nehmen. Es ist dann

$$V \cdot x_{\prime} = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{a^4}{2} - \frac{a^2 b^2}{2} + \frac{(2a^2+b^2)^3}{12(a^2+b^2)} - \frac{b^6}{12(a^2+b^2)}\right]$$

$$= \frac{\pi \cdot a^6}{12(a^2+b^2)}.$$

Für den ersten Rotationskörper ist

$$x_{\prime} = \frac{2a^2}{3\pi\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Im Falle von $a = b$ ist

$$x_{\prime} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \cdot a = 0{,}1500053a,$$

im Falle $a = b\sqrt{3}$

$$x_{\prime} = \frac{\sqrt{3}}{3\pi} \cdot a = 0{,}1837763a,$$

im Falle $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$

$$x_{\prime} = \frac{a}{3\pi} = 0{,}1061033a.$$

Für den zweiten Rotationskörper ist die Schwerpunkts-Coordinate des halben Volumens im Falle von $a = b$

$$x_{\prime} = \frac{a^4\pi}{12 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0{,}0362367a^3}$$

$$= 0{,}574924 \cdot a;$$

im Falle $a = b\sqrt{3}$

$$x_{\prime} = \frac{a^4\pi}{32 \cdot \pi \cdot 0{,}0575072a^3}$$

$$= 0{,}54341 \cdot a;$$

im Falle $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$

$$x_{\prime} = \frac{a^4\pi}{96 \cdot \pi \cdot 0{,}01739a^3}$$

$$= 0{,}599a.$$